

SOBRE LA MECÁNICA DEL PÉNDULO.

Arequipa Elsa⁴
erarequipa@uce.edu.ec

Chari Fernando⁵
fjchari@uce.edu.ec

Mora Alexander⁶
admoram@uce.edu.ec

Universidad Central del Ecuador
Quito – Ecuador

Resumen

Se describe las características del péndulo de n -ésimos eslabones. Cuando $N_2 = 2$ eslabón, se trata del sistema péndulo doble y se analiza la mecánica de su movimiento mediante un formalismo Lagrangiano, se reconocen las restricciones del sistema y los grados de libertad, para encontrar el número mínimo de ecuaciones de Lagrange que describen el movimiento del sistema. Una vez determinado el Lagrangiano y las ecuaciones diferenciales que rigen el movimiento, se utiliza los paquetes de MATLAB para dar solución numérica a las ecuaciones halladas mediante el método numérico Runge-Kuta, seguidamente se diseña un simulador con el objetivo de verificar visualmente el comportamiento del péndulo doble. Finalmente, se determina de manera analítica y visual si el sistema péndulo doble es un Sistema Caótico, y se explican los resultados encontrados.

Palabras Clave

Péndulo doble - Ecuaciones de Lagrange - Simulador

Índice

Introducción	13
1. Métodos	14
1.1 Restricciones	14
1.2 Grados de Libertad	14
1.3 Ecuaciones de Lagrange	15
1.4 Lagrangiano	15
1.5 Ecuaciones del movimiento	15
2. Simulación en MATLAB	16
3. Resultados y Discusión	16
3. Conclusiones	17
Agradecimientos	17
Referencias	17

Introducción

Si se considera ($N_i = i$ eslabón: $i = 1, 2, \dots, n$) y un sistema de masas puntuales ($m_i: i = 1, 2, \dots, n$) suspendidas de un eje horizontal mediante un conjunto de longitudes despreciables ($l_i: i = 1, 2, \dots, n$) se obtiene el péndulo de N -eslabones, cuya configuración de construcción desborda en simplicidad como lo muestra la Figura 1.

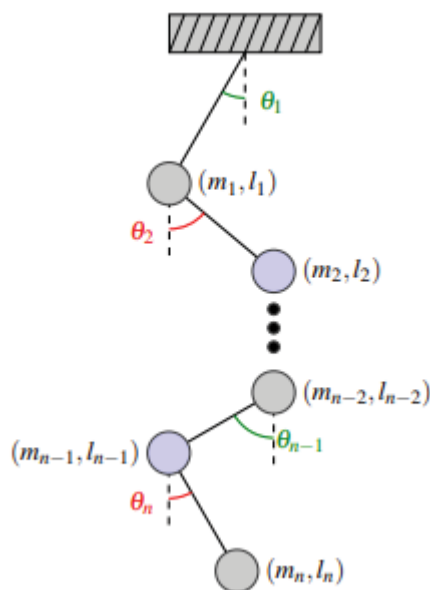


Figura 3. Péndulo de N -eslabones

Si $i=1$ entonces $N_1 = 1$ eslabón, o comúnmente llamado péndulo simple [ver Figura 2], cuya mecánica es relativamente fácil de estudiar debido a que su movimiento se ve determinado por ecuaciones lineales, en otras palabras es un sistema integrable.

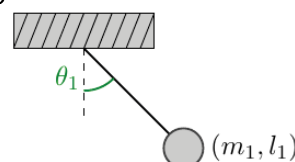


Figura 4. Péndulo Simple

Si $i = 2$ entonces $N_2 = 2$ eslabón, o llamado péndulo doble como lo muestra la Figura 4, cuyo movimiento se ve determinado por ecuaciones que poseen funciones no lineales de las variables de la forma $f(x + y) \neq f(x) + f(y)$, es decir es un sistema no integrable.

Si $i = 3$ entonces $N_3 = 3$ eslabón, o conocido como péndulo triple, cuyo movimiento es más complejo de analizar en comparación a los sistemas mencionados con anterioridad, ver Figura 3.

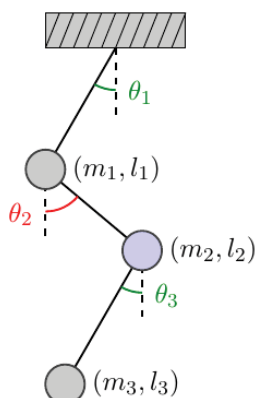


Figura 5. Péndulo triple.

Finalmente, para Consenza (2016), “la no integrabilidad de un sistema puede exhibir un comportamiento caótico”. Por tal motivo, se realizará un análisis completo del sistema péndulo doble para determinar de manera analítica y visual su comportamiento caótico.

1. Métodos

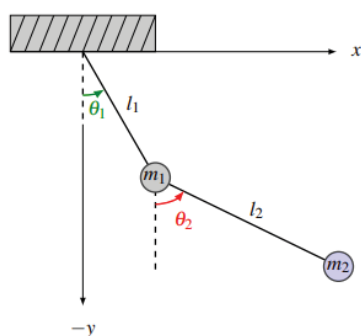


Figura 6. “Péndulo Doble”

Si una masa m_1 suspendida del origen de coordenadas $(0,0)$ del plano cartesiano, mediante una longitud de cuerda l_1 , y una masa m_2 suspendida de una masa m_1 , mediante una longitud de cuerda l_2 , a este sistema compuesto de dos péndulos simples se le denomina péndulo doble

En la búsqueda de ecuaciones que describan el movimiento de manera alternativa (aunque equivalente), Lagrange¹ proporciona establecer un nuevo sistema de coordenadas que faciliten los cálculos, pues, resulta más sencillo analizar cómo evoluciona θ_1 y θ_2 en el tiempo; ya que estas funciones permiten definir la trayectoria del péndulo doble en $\mathbb{R}^2$.

1.1 Restricciones

Existe dos restricciones para m_1 y para m_2 , luego se tiene:

Para m_1 :

$$\begin{aligned} f_1(\vec{r}_1) &= z_1 = 0 \\ f_2(\vec{r}_1) &= x_1^2 + y_1^2 = l_1^2 \end{aligned} \quad (1)$$

Para m_2 :

$$\begin{aligned} f_3(\vec{r}_2) &= z_2 = 0 \\ f_4(\vec{r}_2) &= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = l_2^2 \end{aligned} \quad (2)$$

Luego, existen 4 restricciones para el sistema péndulo doble, es decir $k = 4$.

1.2 Grados de Libertad

Por simple inspección de la Figura 4 se puede determinar que 2 componentes rectangulares son totalmente independientes. Consecuentemente, el sistema tiene 2 grados de libertad.

Analíticamente:

$$\begin{aligned} n &= 3N - k \\ n &= 2 \end{aligned} \quad (3)$$

En consecuencia, el método analítico verifica que el sistema tiene 2 grados de libertad.

¹ Joseph-Louis de Lagrange reformula la mecánica clásica en los siglos diecisiete y diecinueve.

1.3 Ecuaciones de Lagrange

Según Taylor² para cualquier sistema restringido con energía potencial U y coordenadas generalizadas:

$$q_1 = \theta_1(t) \quad q_2 = \theta_2(t)$$

Además, la evolución en el tiempo del sistema está determinado por $n = 2$ ecuaciones de Lagrange:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_1} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_1} \right) = 0 \quad (4)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_2} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_2} \right) = 0 \quad (5)$$

1.4 Lagrangiano

Para el caso particular de fuerzas conservativas, el Lagrangiano $\mathcal{L}$ se define como la diferencia de la energía cinética total T y la energía potencial total U , y no ahondaremos en su demostración por la complejidad que suscita el caso. Por lo tanto, se asume:

$$\mathcal{L} := T - U \quad (6)$$

$$T := T_1 + T_2 \quad (7)$$

$$U := U_1 + U_2 \quad (8)$$

Para determinar T_1 y U_1 se debe analizar el vector posición $\vec{r}_1 = (x_1, y_1, 0)$ de m_1 de la Figura 5 con respecto al extremo superior o extremo sujeto al eje horizontal de l_1 , entiéndase como el centro de coordenadas $(0,0)$ del sistema.

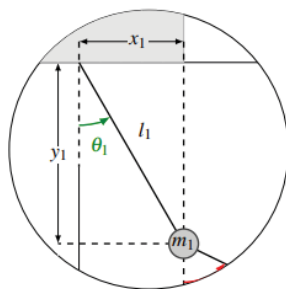


Figura 7. Análisis de T_1 y U_1 .

Para determinar T_2 y U_2 se debe analizar el vector $\vec{r}_2 = (x_2, y_2, 0)$ de m_2 de la Figura 5 con respecto al centro de coordenadas. Mientras que, para hallar l_{2x} y l_{2y} se debe realizar el análisis con respecto a m_1 , como lo muestra la Figura 6.

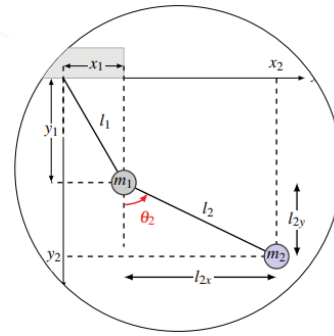


Figura 8. Análisis de T_2 y U_2

Después de del proceso de análisis, se realiza una serie de sustituciones correspondientes, para determinar a Lagrangiano $\mathcal{L}$, en terminos de las coordenadas generalizadas q_1 y q_2 , es decir $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\theta_1, \theta_2)$. Luego, se tiene:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{1}{2}(m_1+m_2)l_1^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}m_2l_2^2\dot{\theta}_2^2 + \\ & m_2l_1l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\cos(\theta_1-\theta_2) + gl_1\cos\theta_1(m_1+m_2) \\ & + m_2gl_2\cos\theta_2 \end{aligned} \quad (9)$$

1.5 Ecuaciones del movimiento

Trabajando en las ecuación 4 y 9 se obtiene la ecuación de Lagrange para θ_1 :

$$\begin{aligned} 0 = & (m_1+m_2)l_1^2\ddot{\theta}_1 + (m_1+m_2)gl_1\sin\theta_1 + \\ & m_2l_1l_2\ddot{\theta}_2\cos(\theta_1-\theta_2) + \\ & m_2l_1l_2\dot{\theta}_2^2\sin(\theta_1-\theta_2) \end{aligned} \quad (10)$$

De forma análoga, trabajando en las ecuación 5 y 9 se obtiene la ecuación de Lagrange para θ_2 :

$$\begin{aligned} 0 = & m_2l_2^2\ddot{\theta}_2 + m_2gl_2\sin\theta_2 \\ & + m_2l_1l_2\ddot{\theta}_1\cos(\theta_1-\theta_2) \\ & - m_2l_1l_2\dot{\theta}_1^2\sin(\theta_1-\theta_2) \end{aligned} \quad (11)$$

Despejando $\ddot{\theta}_1$ y $\ddot{\theta}_2$ de las ecuaciones 10 y 11 se obtienen ecuaciones diferenciales que rigen el movimiento del péndulo doble.

Previamente se define:

$$\begin{aligned} \omega &:= \theta_1 - \theta_2 \\ \alpha &:= \theta_1 - 2\theta_2 \\ m &:= m_1 + m_2 \\ M &:= 2m_1 + m_2 \\ H &:= M\sin\theta_1 + m_2\sin\alpha \end{aligned}$$

Entonces:

(12)

² Taylor, J.R. Classical Mechanics. University Science Books, 2005

$$\ddot{\theta}_1 = \frac{-gH - 2m_2 \sin \omega [l_2 \dot{\theta}_2^2 + l_1 \dot{\theta}_1^2 \cos \omega]}{l_1 [M - m_2 \cos 2\omega]}$$

$$\ddot{\theta}_2 = \frac{2 \sin \omega [m (l_1 \dot{\theta}_1^2 + g \cos \theta_1) + m_2 l_2 \dot{\theta}_2^2 \cos \omega]}{l_2 [M - m_2 \cos 2\omega]} \quad (13)$$

Además, las ecuaciones 12 y 13 se pueden expresar como funciones de sus coordenadas y velocidades generalizadas, es decir:

$$\ddot{\theta}_1 = \ddot{\theta}_1(\theta_1, \theta_2, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2) \quad (12.1)$$

$$\ddot{\theta}_2 = \ddot{\theta}_2(\theta_1, \theta_2, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2) \quad (13.1)$$

Según Consenza (2016), “un sistema con n grados de libertad es integrable si posee, al menos, s cantidades conservadas; es decir, si $n = s$ ” y “si un sistema con n grados de libertad tiene menos de s cantidades conservadas ($s < n$), se denomina no integrable”.

Analíticamente:

$n=2$ grados de libertad
 $s = 1$ cantidad conservada (Energía)

Como $s < n$, el sistema no es integrable, entonces, se puede afirmar de manera analítica que el sistema péndulo doble es un Sistema Caótico.

2. Simulación en MATLAB

En esta sección, se hará uso de las bibliotecas y paquetes de MATLAB, debido a sus altas capacidades como software matemático para resolver Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO) y determinar valores propios.

Las ecuaciones 12 y 13 no tienen solución analítica por la condición de integralidad. Por cuál, se hará uso de la función ODE-45 para dar solución numérica a las ecuaciones halladas en la sección anterior. ODE-45 se basa en el método de integración Runge-Kutta de cuarto y quinto orden, con tamaño de paso adaptativo.

3. Resultados y Discusión

Dada las condiciones iniciales que se indican en la Tabla 1.

Tabla 1. Condiciones iniciales (C1) de θ_1 y θ_2

#	θ_1	θ_2	l_1	l_2	m_1	m_2
	rad	rad	m	m	kg	kg
1	$3\pi/4$	$\pi/2$	3	2	2	3

Para un intervalo de tiempo $t \in [0,30]$ segundos, se obtienen las siguientes trayectorias para m_1 y m_2 .

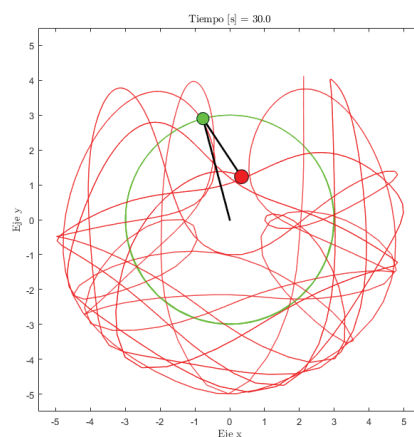


Figura 9. Simulación del movimiento para C1.

Se puede observar en la Figura 7 que m_1 sigue una trayectoria circular, mientras que m_2 no se acopla a ninguna función.

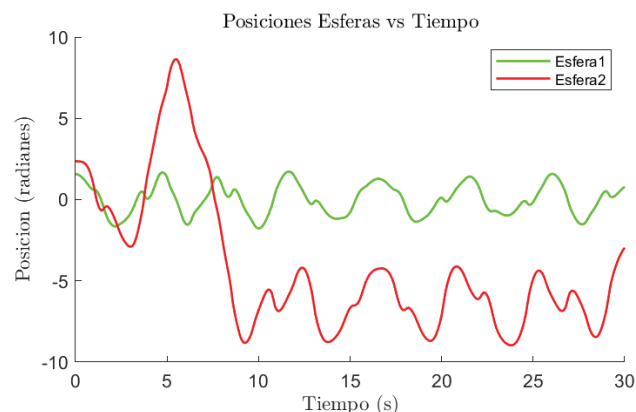


Figura 10. Diagrama θ_1 vs t (Verde) y θ_2 vs t (Rojo).

Sin embargo, al observar los resultados arrojados por la Figura 8, podemos afirmar que tanto la trayectoria de m_1 y m_2 , no se acoplan a ninguna función conocida.

Ahora, se considera modificar el valor de θ_1 , aumentando o disminuyendo valores despreciables, como se indica en la Tabla 2.

Tabla 2. Condiciones iniciales (C2) de θ_1 y θ_2

#	θ_1	θ_2	l_1	l_2	m_1	m_2
	rad	rad	m	m	kg	kg
1	$3\pi/4 + 0,001$	$\pi/2$	3	2	2	3

Para un intervalo de tiempo $t \in [0,30]$ segundos, se obtienen las siguientes trayectorias para m_1 y m_2 , considerando las condiciones iniciales de la Tabla 2.

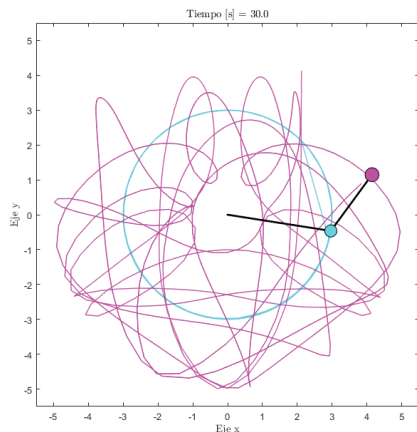


Figura 11. Simulación del movimiento para C2.

Como podemos observar en la Tabla 2, se ha sumado un valor muy insignificante de 0,001 radián al ángulo θ_1 . Sin embargo, el péndulo describe trayectorias muy diferentes en comparación a las trayectorias descritas para las condiciones iniciales de la Tabla 1, como se verifica a continuación:

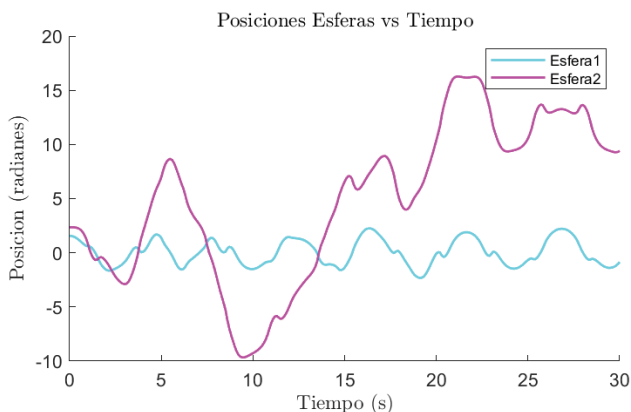


Figura 10. Diagrama θ_1 vs t (Cyan) y θ_2 vs t (Magenta).

Al comparar el diagrama de la Figura 10 y la Figura 8 se puede determinar que un mínimo cambio en las condiciones iniciales dan como resultado trayectorias totalmente diferentes. Por lo tanto, se puede comprobar de manera visual, que el sistema péndulo doble es un Sistema Caótico.

3. Conclusiones

1. La versión lagrangiana de la mecánica tiene grandes ventajas en comparación a la mecánica newtoniana, funciona igual en todos los sistemas y maneja fácilmente los sistemas restringidos.
2. El sistema péndulo doble es un Sistema Caótico, ya que las ecuaciones que rigen su movimiento son funciones no lineales, es

decir, se cumplió que $f(x + y) \neq f(x) + f(y)$. Además, las cantidades conservadas (Energía) son menores a los grados de libertad del sistema ($s < n$), por lo tanto, el sistema péndulo doble es un sistema no integrable. Estas dos condiciones, verifican el comportamiento caótico del sistema péndulo doble.

3. Las trayectorias de las masas m_1 y m_2 que parten de condiciones iniciales cercanas en un tiempo $t = 0$ segundos, no se mantienen cercanas en un tiempo $t = 30$ segundos, sino que evolucionan de manera irregular y totalmente diferente conforme t avanza, comparar la Figura 7 con la Figura 9 y la Figura 8 con la Figura 10. Por lo tanto, la simulación y los diagramas en MATLAB verifican de manera visual que el sistema péndulo doble es un Sistema Caótico.

Agradecimientos

Yo Chari Fernando como autor principal, me remito a expresar mis sentimientos de alta estima, motivación y aprecio a la MSc. Arequipa Elsa, por brindar su total apoyo en la redacción del presente artículo y por proporcionar y permitirme realizar mejoras en el código fuente de la simulación del sistema péndulo doble en MATLAB.

Es de vital importancia, expresar mis sentimientos de consideración con el Sr. Mora Alexander, por ayudar en la construcción de un prototipo del péndulo doble, y a los docentes del Centro de Física de la Universidad Central del Ecuador por permitirme realizar prácticas preprofesionales en dichas instalaciones.

Referencias

- Consenza, M. (2016). *Mecánica Clásica*. Universidad de los Andes Mérida.
- Goldstein, H. (2001). *Classical Mechanics*. Addison-Wesley.
- Gutiérrez, I., Collado, J. y Tellez, J. (2014). Estabilización del Péndulo Doble mediante excitación paramétrica. *Memorias del XVI Congreso Latinoamericano de Control Automático, CLCA, 14(17)*, 1248-1253.
- Linares, J. (2018). *Péndulo Doble*. Universidad de Sevilla.
- Taylor, J. (2005). *Classical Mechanics*. University Science Books.